



Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapă locală - Iași, 30 ianuarie 2026

Clasa a VI-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1.

a) Aflați numerele naturale consecutive $x < y < z < t < u$, astfel încât numărul $n = \frac{x+y+z+t}{u}$ să fie număr natural impar.

(adaptare supliment *Gazeta Matematică* nr. 9/2025)

b) Fie $A = \left\{ \frac{2035}{10}, \frac{2036}{11}, \frac{2037}{12}, \dots \right\}$. Determinați cardinalul mulțimii $A \cap \mathbb{N}$.

(*Gazeta Matematică* nr. 9/2025)

Soluție:

a) Fie $y = x + 1, z = x + 2, t = x + 3, u = x + 4$ **1p**

Atunci, $n = \frac{4x+6}{x+4}$ **1p**

$n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x+4)/(4x+6)$**2p**

Avem $(x+4)/(x+4)$ și $(x+4)/(4x+6)$, iar de aici rezultă că $(x+4)/10$**4p**

Așadar, $(x+4) \in \{1,2,5,10\}$, și cum x este număr natural, va rezulta că $x \in \{1,6\}$**1p**

Dacă $x = 1 \Rightarrow n = \frac{10}{5} = 2$, care este număr par, nu convine.....**2p**

Dacă $x = 6 \Rightarrow n = \frac{30}{10} = 3$ număr natural impar, convine.....**2p**

Numerele sunt $x = 6, y = 7, z = 8, t = 9, u = 10$**1p**

b) Un element oarecare al mulțimii A este de forma $\frac{2025+k}{k}$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geq 10$**2p**

$\frac{2025+k}{k} = 1 + \frac{2025}{k} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow k/2025 \Rightarrow k \in D_{2025}$ și $k \geq 10$**3p**

Cum $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, numărul divizorilor săi este egal cu $5 \cdot 3 = 15$**2p**

Dacă vom exclude numerele 1, 3, 5 și 9, obținem 11 valori posibile pentru numărul k , adică

sunt 11 fracții care aparțin mulțimii A și sunt numere naturale, deci $\text{card}(A \cap \mathbb{N}) = 11$**4p**

Problema 2. a) Determinați numerele naturale n pentru care $2^n - 1$ și $2^n + 1$ sunt simultan prime.

b) Determinați numerele naturale a și b , pentru care $(a, b) = 5$ și $[a, b] = (2a, 3b)$, unde (a, b) și $[a, b]$

reprezintă cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Soluție:

- a) Știind că având trei numere consecutive $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$, unul dintre ele este divizibil cu 3 și cum 2^n nu poate fi divizibil cu 3, rezultă că unul dintre celelalte două este divizibil cu 3.....3p

Fiind vorba de numere prime analizăm cazurile :

Cazul I: $2^n - 1 = 3 \Rightarrow n = 2$, iar în acest caz $2^n + 1 = 5$, ceea ce convine2p

Cazul al II-lea : $2^n + 1 = 3 \Rightarrow n = 1$ și atunci $2^n - 1 = 1$, nu convine.....2p

- b) Fie $a = 5x, b = 5y$, unde $(x, y) = 1$, iar $[a, b] = 5xy = ay = bx$ 2p

$[a, b] | 2a \Rightarrow ay | 2a \Rightarrow y | 2$, analog $x | 3$ 2p

- I) $x = y = 1 \Rightarrow a = b = 5 \Rightarrow [a, b] = (2a, 3b) = 5$ 2p

- II) $x = 1, y = 2 \Rightarrow a = 5, b = 10$ și $[a, b] = 10$ iar $(2a, 3b) = (10, 30) = 10$, verifică.....2p

- III) $x = 3, y = 1 \Rightarrow a = 15, b = 5 \Rightarrow [a, b] = 15$ și $(2a, 3b) = (30, 15) = 15$, verifică.....2p

- IV) $x = 3, y = 2 \Rightarrow a = 15, b = 10 \Rightarrow [a, b] = 30$ iar $(2a, 3b) = (30, 30) = 30$, verifică.....2p

Soluția este $(5; 5), (5; 10), (15; 5), (15; 10)$ 1p

Problema 3. Fie numerele naturale nenule x, y, z astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 2026$, iar numerele x, y și $3z$ sunt direct proporționale cu numerele $x + 26, y + 14$ și $3z + 16$.

Determinați numerele x, y și z .

Soluție:

Din directa proporționalitate, obținem:

$$\frac{x}{x+26} = \frac{y}{y+14} = \frac{3z}{3z+16} \dots\dots\dots 2p$$

Inversând relațiile anterioare, obținem:

$$\frac{x+26}{x} = \frac{y+14}{y} = \frac{3z+16}{3z} \Rightarrow 1 + \frac{26}{x} = 1 + \frac{14}{y} = 1 + \frac{16}{3z} \dots\dots\dots 3p$$

Prin urmare, obținem:

$$\frac{26}{x} = \frac{14}{y} = \frac{16}{3z} \Rightarrow \frac{x}{26} = \frac{y}{14} = \frac{3z}{16} \dots\dots\dots 3p$$

Notând ultimul raport cu k , obținem: $x = 26k, y = 14k$ și $z = \frac{16k}{3}$3p

Atunci

$$2026 = x^2 + y^2 + z^2 = (26k)^2 + (14k)^2 + \left(\frac{16k}{3}\right)^2 = 676k^2 + 196k^2 + \frac{256k^2}{9}, \text{ de unde}$$

$$2026 = 872k^2 + \frac{256k^2}{9} = \frac{8104k^2}{9} = \frac{2026 \cdot 4 \cdot k^2}{9} \dots\dots\dots 3p$$

Obținem astfel $2026 \cdot 9 = 2026 \cdot 4 \cdot k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{9}{4}$. Cum $x, y, z \in N^*$, atunci $k = \frac{3}{2}$3p

Prin urmare, vom avea

$$\frac{x}{26} = \frac{y}{14} = \frac{3z}{16} = \frac{3}{2},$$

de unde obținem

$$x = \frac{3 \cdot 26}{2} = 39, y = \frac{14 \cdot 3}{2} = 21, z = \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{16}{2} = 8 \dots\dots\dots 3p$$

Problema 4. În interiorul unghiului \widehat{AOB} cu măsura de 140° , se consideră punctele C și D , astfel încât punctul C aparține interiorului unghiului \widehat{AOD} .

Se știe că $2 \cdot m(\widehat{COD}) = 3 \cdot m(\widehat{AOC})$ și că $3 \cdot m(\widehat{BOC}) = 5 \cdot m(\widehat{COD})$.

- Arătați că $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOD})$.
- Demonstrați că unghiurile \widehat{AOB} și \widehat{COD} au aceeași bisectoare.
- Dacă (OM este bisectoarea unghiului \widehat{COD} și ($ON \perp (OM$, calculați $m(\widehat{AON})$.

Soluție: a) Din egalitatea $2 \cdot m(\widehat{COD}) = 3 \cdot m(\widehat{AOC}) \Rightarrow m(\widehat{AOC}) = \frac{2}{3} \cdot m(\widehat{COD}) \dots\dots\dots 1p$

Din egalitatea $3 \cdot m(\widehat{BOC}) = 5 \cdot m(\widehat{COD}) \Rightarrow m(\widehat{BOC}) = \frac{5}{3} \cdot m(\widehat{COD}) \dots\dots\dots 2p$

$$m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOB}) = 140^\circ \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot m(\widehat{COD}) + \frac{5}{3} \cdot m(\widehat{COD}) = 140^\circ,$$

de unde obținem că $m(\widehat{COD}) = 60^\circ \dots\dots\dots 4p$

Așadar, $m(\widehat{AOC}) = 40^\circ$ și $m(\widehat{BOD}) = 40^\circ$, deci $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOD}) \dots\dots\dots 2p$

b) Fie (OM bisectoarea unghiului $\widehat{COD} \Rightarrow \widehat{COM} \equiv \widehat{MOD}$, și cum $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD}$, va rezulta că $\widehat{AOM} \equiv \widehat{MOB}$, deci semidreapta (OM este și bisectoarea unghiului $\widehat{AOB} \dots\dots\dots 4p$

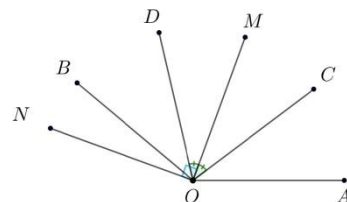
c) Vom analiza două cazuri:

Cazul I: N și B sunt situate de aceeași parte a dreptei OA

În acest caz,

$$m(\widehat{AON}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{MOC}) + m(\widehat{MON})$$

$$m(\widehat{AON}) = 40^\circ + 30^\circ + 90^\circ = 160^\circ \dots\dots\dots 6p$$



Cazul al II lea: N și B sunt situate de o parte și de alta a dreptei OA

În acest caz,

$$m(\widehat{AON}) = m(\widehat{MON}) - m(\widehat{MOC}) - m(\widehat{COA})$$

$$m(\widehat{AON}) = 90^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 20^\circ \dots\dots\dots 6p$$

